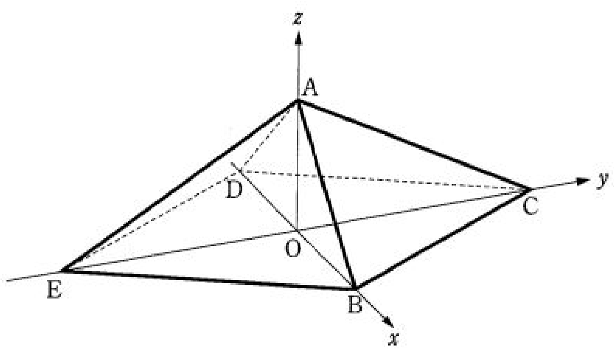
数学Ⅱ・数学B

第4問 （選択問題）（配点 20）

Oを原点とする座標空間における5点をA(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 2, 0)，D(−1, 0, 0)，E(0, −2, 0)とする。ひし形BCDEを底面とする四角錐(すい)A−BCDEと，平面ABCに平行な平面との共通部分について考える。



(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\boxed{\text{ア}}$であり，三角形ABCの面積は$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$である。

(2) $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$，$\vec{v}=\overrightarrow{BE}$とおく。$0<a<1$とし，点$B_1$を線分BEを$a:(1-a)$に内分する点とすると，$\overrightarrow{BB_1}=\boxed{\text{エ}}\vec{v}$である。点$A_1$を

$$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BB_1}$$

で定め，線分A_1B_1と線分AEが交わることを示そう。A_1B_1上の点Pは，$0\leqq b\leqq 1$を満たすbを用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+b\vec{u}+\boxed{\text{エ}}\vec{v}$$

と表される。また，AE上の点Qは，$0\leqq c\leqq 1$を満たすcを用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{オ}}\vec{u}+\left(\boxed{\text{カ}}-c\right)\vec{v}$$

と表される。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

P と Q は $b=$ $\boxed{\text{キ}}$ $=$ $\boxed{\text{クケ}}$ $+1$ のとき一致するから，線分 A_1B_1 と AE は，AE を $\boxed{\text{コ}}$: $\left(1-\boxed{\text{コ}}\right)$ に内分する点で交わることがわかる。この点を E_1 とする。

点 C_1 を

$$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BB_1}$$

で定めると，同様に考えることにより，線分 A_1C_1 と線分 AD も，AD を $\boxed{\text{サ}}$: $\left(1-\boxed{\text{サ}}\right)$ に内分する点で交わることがわかる。この点を D_1 とすると

$$\overrightarrow{D_1E_1}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{DE}$$

であり，三角形 $A_1B_1C_1$ は三角形 ABC と平行であるから，四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}^{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

である。

また

$$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}\,a^2-\boxed{\text{テ}}\,a+\boxed{\text{ト}}}$$

である。

解答と解説

見やすくする目的で，座標とベクトルを列表示する。

すると，5 点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\mathrm{C}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\mathrm{D}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\mathrm{E}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=1\quad\cdots(答)$$

三角形 ABC の面積

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot2-1}=\frac{3}{2}\quad\cdots(答)$$

補足：裏ワザ

手順 1

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}\text{ を }\begin{array}{cc}k&p\\l&q\\m&r\\k&p\end{array}\text{ と並べる。}$$

手順 2

$$\begin{array}{cc}k&p\\l&q\\m&r\\k&p\end{array}$$

各色の枠で囲まれた成分について，$kq-lp,lr-mq,mp-kr$ の値を求める。

手順 3

三角形 ABC の面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{(kq-lp)^2+(lr-mq)^2+(mp-kr)^2}$

問題の場合，$\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\dfrac{3}{2}$

参考

小ネタの部屋　数学小ネタ　外積の活用

http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukonetapdf/exterior%20product.pdf

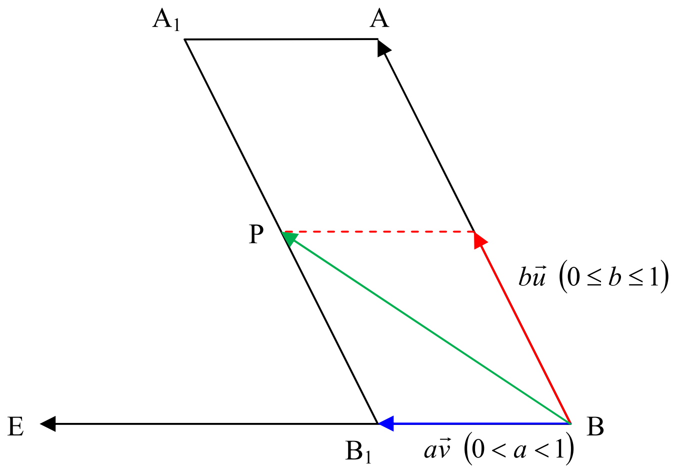
(2)

直感しやすくする目的で平面図形で表して考える。(次元の次数下げ)

$\overrightarrow{\mathrm{BB_1}} = a\vec{v}$ ・・・(答)

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{BB_1}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \overrightarrow{\mathrm{BB_1}}$

よって，四角形 $\mathrm{BAA_1B_1}$ は平行四辺形である。



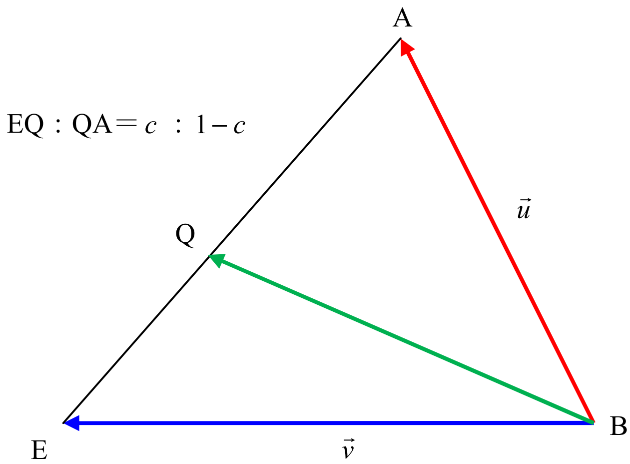
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + b\overrightarrow{\mathrm{BA}} + a\overrightarrow{\mathrm{BB_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + b\vec{u} + a\vec{v}$ ・・・(答)

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行四辺形 $\mathrm{BAA_1B_1}$ の頂点 B にたどり着くためのベクトルに過ぎないと理解する。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

点 Q が線分 AE を $1-c:c$ $(0 \le c \le 1)$ に内分する点とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{BA}} + (1-c)\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\vec{u} + (1-c)\vec{v}$ ・・・(答)



P と Q が一致するとき

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が互いに独立なベクトルであることより，

P と Q が一致するためには，それぞれの係数が一致することが必要である。

よって， $b = c$ かつ $a = 1 - c$

ゆえに， $b = c = -a + 1$ ・・・(答)

これより，線分 A_1B_1 と AE は，AE を $1 - c : c = 1 - (-a + 1) : -a + 1 = a : 1 - a$ ・・・(答)

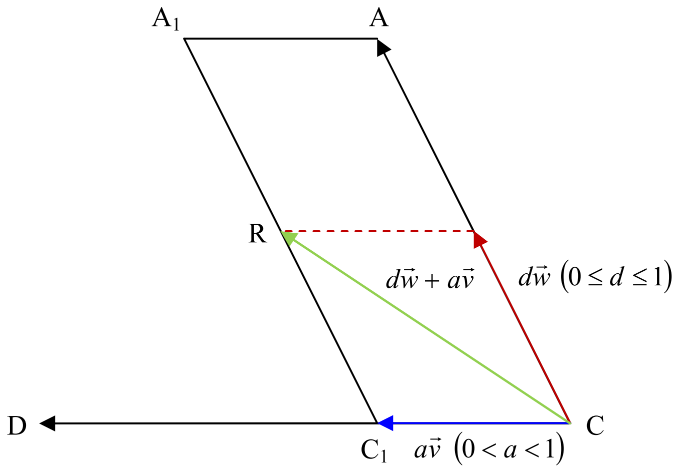
に内分する点で交わる。

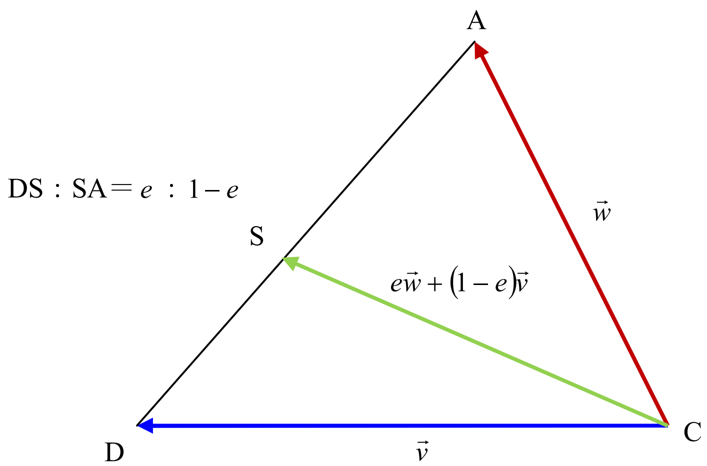
$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BB_1}$ より， $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1}$

これと $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ より，四角形 CAA_1C_1 は平行四辺形である。

同様に，下図のように，描くと， $d\vec{w} + a\vec{v} = e\vec{w} + (1 - e)\vec{v}$ より， $d = e$ かつ $a = 1 - e$ より，

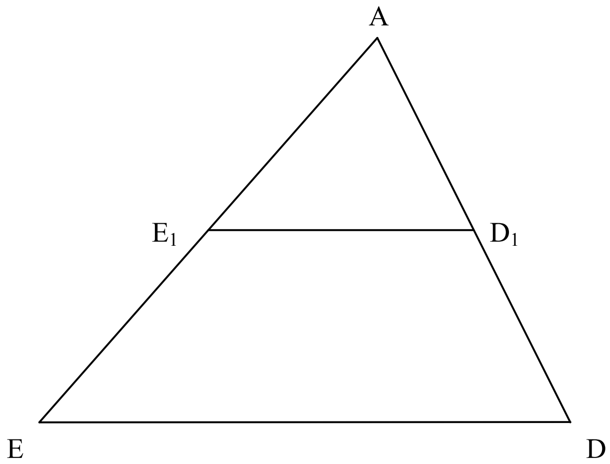
よって，線分 A_1C_1 と線分 AD も，AD を $a : (1 - a)$ に内分する点で交わることがわかる。





△AED ∽ △AE$_1$D$_1$，相似比 AE$_1$：AE＝a ：1 より，E$_1$D$_1$：ED＝a ：1

よって，$\overrightarrow{D_1E_1}=a\overrightarrow{DE}$ ・・・(答)



$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$ より，三角形 A$_1$B$_1$C$_1$ は三角形 ABC と平行であるから，

側面の 3 つの四角形はいずれも平行四辺形である。

よって，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C_1A_1}$ より，△ABC ≡ △A$_1$B$_1$C$_1$

これと四角錐の側面の三角形は合同であることから，四角形 B$_1$C$_1$D$_1$E$_1$≡四角形 E$_1$EDD$_1$
よって，
四角形 B$_1$C$_1$D$_1$E$_1$ の面積＝四角形 E$_1$EDD$_1$ の面積
＝△AED の面積－△AE$_1$D$_1$ の面積
＝△AED の面積－△AED の面積$\times a^2$
＝△AED の面積$\times(1-a^2)$
＝△ABC の面積$\times(1-a^2)$
＝$\dfrac{3}{2}(1-a^2)$ ・・・(答)

D$_1$ は AD を $a:(1-a)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{OD_1}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OD}=(1-a)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\0\\1-a\end{pmatrix}$$

B$_1$ は BE を $a:(1-a)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{OB_1}=(1-a)\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{OE}=(1-a)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a\\-2a\\0\end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{B_1D_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=\begin{pmatrix}-a\\0\\1-a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-a\\-2a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2a\\1-a\end{pmatrix}$

$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{B_1D_1}}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2a)^2+(1-a)^2}=\sqrt{5a^2-2a+2}$　・・・（答）